数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 138-145

A method for constructing models which have an infinite number of conserved currents

横浜市立大学理学部 藤井 一幸 (Kazuyuki Fujii)
早稲田大学理工学研究科 本間 泰史 (Yasushi Homma)
早稲田大学理工学部 鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki)*

概要

$(1+n)$ 次元 Minkowski 空間上で定義された高階の非線型偏微分方程式系で，無限個の保存カレントを持ち，解に大きな対称性があるものを，Bell 多項式を用いて構成する．

1 動機

M^{1+n} を $(1+n)$ 次元 Minkowski 空間，その座標を $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ とし，u を M^{1+n} から $\mathbf{C}$ への関数とする．この一般の $(1+n)$ 次元の場合に，解に大きな対称性を持つ非線型偏微分方程式系を得たい．我々は以前の論文 [1] で，Nonlinear $\mathbf{C}P^1$ sigma model にある条件を加えて作られた $\mathbf{C}P^1$-submodel (2 階の非線型偏微分方程式系) ([2] 参照) を高階導関数を含むクラスに一般化して，次の方程式系を得た;
$p = 2, 3, \cdots$ に対し，

$$\square_p(u^k) \equiv \left(\frac{\partial^p}{\partial x_0^p} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^p}{\partial x_j^p}\right)(u^k) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, p) \tag{1.1}$$

これを p-submodel と呼ぶことにする．$p = 2$ の場合が $\mathbf{C}P^1$-submodel である．

この p-submodel は高階にもかかわらず無限個の保存カレントを持ち，解に大きな対称性がある．その保存カレントは次で与えられる;
Bell 多項式 F_n に対し，微分作用素 $F_{n,\mu}$ を

$$F_{n,\mu} \equiv\, :F_n(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u}, \partial_\mu^2 u \frac{\partial}{\partial u}, \cdots, \partial_\mu^n u \frac{\partial}{\partial u}): \tag{1.2}$$

---

*講演者
E-mail address: suzukita@mse.waseda.ac.jp

とおく (詳しい定義は後述). このとき

$$V_{p,\mu}(f) \equiv \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k : F_{p-1-k,\mu}\bar{F}_{k,\mu} : (f) \tag{1.3}$$

($f = f(u,\bar{u})$ は任意の C^p 級関数) は p-submodel の保存カレントになる. ここで使われた微分作用素 $V_{p,\mu}$ の構成には Bell 多項式を用いたが, $V_{p,\mu}$ の形の必然性はわからなかった. そこで, 異なる parameter を持つ Bell 多項式どうしの 2 次の積で生成されるベクトル空間を考え, その上で total divergence がどのように表現されるかを調べることにより, 保存カレントを求める計算が通常の 2 変数多項式の計算に帰着され, そこから $V_{p,\mu}$ が自然に現れることがわかった. さらにその対応を見ることにより, 無限個の保存カレントをもち, かつ p-submodel を含む, さらに広いクラスの非線型偏微分方程式系が定義される. このことを以下に述べる.

2 Bell 多項式

合成関数の高階導関数の公式 (di Bruno の公式) に現れる Bell 多項式について, 必要なことを準備する [3],[4].

$g(x)$ を滑らかな関数, z を複素数の parameter とする. $g_r \equiv \partial_x^r g(x)$ と置く. 次数 n の Bell 多項式を次の式で定義する:

$$F_n(zg) = F_n(zg_1,\cdots,zg_n) \equiv \sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1\geq 0,\cdots,k_n\geq 0}} \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\left(\frac{zg_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{zg_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{zg_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{2.1}$$

例えば

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = zg_1, \qquad F_2 = zg_2 + z^2 g_1^2.$$

母関数表示は次のようになる.

$$\exp\left\{z\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{j!}t^j\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(zg)}{n!}t^n. \tag{2.2}$$

Bell 多項式に関しては, 次の補題が基本的である.

補題 2.1. 次の漸化式が成り立つ.

$$F_{n+1}(zg) = \left\{\sum_{r=1}^{n} g_{r+1}\frac{\partial}{\partial g_r} + zg_1\right\}F_n(zg). \tag{2.3}$$

$F_n(zg)$ を z で展開した係数 $B_{nj} = B_{nj}(g_1, \cdots, g_{n-j+1})$ も Bell 多項式（または Bell 行列 [4]）と呼ばれる.

$$F_n(zg_1, \cdots, zg_n) = \sum_{j=1}^{n} z^j B_{nj}(g_1, \cdots, g_{n-j+1}). \tag{2.4}$$

次の補題は母関数表示 (2.2) を用いて得られる.

補題 2.2. 関数 $f(u)$, $u(x)$ の微分多項式としての *Bell* 行列をそれぞれ $B_{ij}[f]$, $B_{ij}[u]$ としたとき,

$$B_{jk}[f(u(x))] = \sum_{n=k}^{j} B_{jn}[u] B_{nk}[f] \tag{2.5}$$

が成り立つ.

3 p-submodel の保存カレントの構成法

$g(x)$, $\bar{g}(x)$ を滑らかな関数, z, $\bar{z}$ を parameters とする. $\mathcal{P}_{\rm B}$ で 2 つの Bell 多項式の積 $F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})$ で張られる $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間を表す.（ここで $F_m(\bar{z}\bar{g})$ のことを便宜上 $\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})$ と書いた.）このとき, 次の線型写像を考える.

$$\Phi : \mathcal{P}_{\rm B} \to \mathbf{C}[\xi, \bar{\xi}], \tag{3.1}$$

$$\Phi(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) = \xi^n \bar{\xi}^m \tag{3.2}$$

この写像 Φ により, $\mathcal{P}_{\rm B}$ は 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[\xi, \bar{\xi}]$ と線型同型になる. ここで, $\mathcal{P}_{\rm B}$ 上の線型作用素を

$$\partial \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \left(g_{r+1} \frac{\partial}{\partial g_r} + \bar{g}_{r+1} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_r} \right) + zg_1 + \bar{z}\bar{g}_1 \tag{3.3}$$

と定義する. この作用素は $\mathcal{P}_{\rm B}$ 上 well-defined であり, 次式が成り立つ.

$$\partial(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) = F_{n+1}(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + F_n(zg)\bar{F}_{m+1}(\bar{z}\bar{g}). \tag{3.4}$$

実際, F_n は n-変数の多項式なので有限和になり, (2.3) を用いると,

$$\begin{aligned} &\partial(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})) \\ = &\left\{ \sum_{r=1}^{n} g_{r+1} \frac{\partial}{\partial g_r} + \sum_{r=1}^{m} \bar{g}_{r+1} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_r} + zg_1 + \bar{z}\bar{g}_1 \right\} F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \qquad (3.5) \\ = &\sum_{r=1}^{n} g_{r+1} \frac{\partial F_n(zg)}{\partial g_r} \bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + zg_1 F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \\ &+ F_n(zg) \sum_{r=1}^{m} \bar{g}_{r+1} \frac{\partial \bar{F}_m(\bar{z}\bar{g})}{\partial \bar{g}_r} + \bar{z}\bar{g}_1 F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) \\ = &F_{n+1}(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}) + F_n(zg)\bar{F}_{m+1}(\bar{z}\bar{g}) \end{aligned}$$

となる．この (3.4) より，

$$\Phi \circ \partial \circ \Phi^{-1} = (\xi + \bar{\xi}) \tag{3.6}$$

が成り立つ．

結局，線型同型 Φ を通じて，次の同一視ができたことになる;

$$\begin{aligned} F_n\bar{F}_m &\leftrightarrow \xi^n\bar{\xi}^m, \\ \partial &\leftrightarrow (\xi + \bar{\xi}) . \end{aligned} \tag{3.7}$$

さて，$\mu \in \{0, \cdots, n\}$ を 1 つ選び，$x = x_\mu$, $g(x_\mu) = u(x_0, \cdots, x_\mu, \cdots, x_n)$ と置く．$g_r = \partial_\mu^r u$ である．このとき微分作用素 $F_{n,\mu}$ を Bell 多項式 F_n を用いて次のように定義する;

$$F_{n,\mu} \equiv \ : F_n(zg_1, \cdots, zg_n)\big|_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : \tag{3.8}$$

$$= \ : F_n(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u}, \partial_\mu^2 u \frac{\partial}{\partial u}, \cdots, \partial_\mu^n u \frac{\partial}{\partial u}) : \tag{3.9}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} B_{nj}(g_1, \cdots, g_{n-j+1}) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^j \tag{3.10}$$

そして $\bar{F}_{n,\mu}$ は $F_{n,\mu}$ の複素共役とする．ここで，$: :$ は正規順序，つまり $\frac{\partial}{\partial u}$ を右にもっていくことを意味する．C^{n+m+1} 級の関数 $f = f(u, \bar{u})$ に対し，$: F_{n,\mu}\bar{F}_{m,\mu} : f(u, \bar{u})$ を考え，この関数に total divergence ∂_μ が作用するとき

$$\partial_\mu = \sum_{r=1}^{n} \partial_\mu^{r+1} u \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu^r u)} + \sum_{r=1}^{m} \partial_\mu^{r+1} \bar{u} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu^r \bar{u})} + \partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} + \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}. \tag{3.11}$$

と書けることから，total divergence ∂_μ が $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$ 上では ∂ で表現されることがわかる．すなわち，

$$\partial_\mu : F_{n,\mu}\bar{F}_{m,\mu} : f(u, \bar{u}) \ = \ : \partial(F_n(zg)\bar{F}_m(\bar{z}\bar{g}))\big|_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : f(u, \bar{u}). \tag{3.12}$$

となる．

以後，次のような和の記号を使うことにする．

$$\sum_\mu{}' F_{p,\mu} \equiv F_{p,0} - \sum_{j=1}^{n} F_{p,j}. \tag{3.13}$$

さらに，次の補題から p-submodel も Bell 多項式で表せることがわかる．

補題 3.1. *p-submodel* は次と同値である;

$$\sum_\mu{}' F_{p,\mu} = 0. \tag{3.14}$$

証明:

$$\begin{aligned}
\Box_p(u^k) &= \sum_\mu{}' \, \partial_\mu^p(u^k) \\
&= \sum_\mu{}' \, F_{p,\mu}(u^k) \qquad (\text{di Bruno の公式より}) \\
&= \sum_\mu{}' \sum_{j=1}^{p} B_{pj}(g_1,\cdots,g_{p-j+1}) \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^j (u^k) \\
&= \sum_{j=1}^{p} j! \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \sum_\mu{}' \, B_{pj}(g_1,\cdots,g_{p-j+1}) u^{k-j} \\
&\quad \text{for} \quad 1 \le k \le p.
\end{aligned}$$

これより p-submodel の必要十分条件は

$$\sum_\mu{}' \, B_{pj}(g_1,\cdots,g_{p-j+1}) = 0 \quad \text{for} \quad 1 \le j \le p,$$

つまり

$$\sum_\mu{}' F_{p,\mu} = 0 \tag{3.15}$$

となる. □

同一視 (3.7) と上の考察から, 次のようにして p-submodel の保存カレントが構成できることがわかる;
まず,

$$(\xi+\bar{\xi})p(\xi,\bar{\xi}) = \alpha\xi^p + \beta\bar{\xi}^p \qquad \alpha,\beta : \text{constant}. \tag{3.16}$$

となるような多項式 $p(\xi,\bar{\xi})$ を見つける. それを用いて微分作用素 $V_{p,\mu}$ を

$$V_{p,\mu} \equiv : \Phi^{-1}(p(\xi,\bar{\xi}))|_{z=\frac{\partial}{\partial u}} : \tag{3.17}$$

と定義する. このとき, 任意の C^p 級関数 $f=f(u,\bar{u})$ に対し,

$$V_{p,\mu}(f) \tag{3.18}$$

は p-submodel の保存カレントである.

今の場合, そのような多項式は up to constant で一意に求まる.

$$p(\xi,\bar{\xi}) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\xi^{p-1-k}\bar{\xi}^k. \tag{3.19}$$

よって, 次の微分作用素を得る.

$$V_{p,\mu} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k : F_{p-1-k,\mu}\bar{F}_{k,\mu} : . \tag{3.20}$$

4 さらに広いクラスの非線型偏微分方程式系

$p=2,3,\cdots$ に対し，$i=0,1,\cdots,[(p-1)/2]$ なる組 (p,i) をひとつ決めておく．前節の構成を，2 変数多項式環 $\mathbf{C}[\xi,\bar{\xi}]$ の基底 $\xi^{p-i}\bar{\xi}^i$（とその複素共役の組）に対して適用する．すなわち，

$$(\xi+\bar{\xi})p(\xi,\bar{\xi})=\alpha\xi^{p-i}\bar{\xi}^i+\beta\xi^i\bar{\xi}^{p-i} \tag{4.1}$$

となるような多項式 $p(\xi,\bar{\xi})$ を探す．p-submodel のときと同様に，そのような多項式は up to constant で一意に求まる．

$$p(\xi,\bar{\xi})=\sum_{k=0}^{p-1-2i}(-1)^k\xi^{p-1-i-k}\bar{\xi}^{i+k}. \tag{4.2}$$

これに対応して次の微分作用素が決まる．

$$V_{(p,i),\,\mu}\equiv\sum_{k=0}^{p-1-2i}(-1)^k:F_{p-1-i-k,\,\mu}\bar{F}_{i+k,\,\mu}:\ . \tag{4.3}$$

さて，$\xi^{p-i}\bar{\xi}^i$ に対応する偏微分方程式系はどのようなものであろうか？
まず Bell 多項式で書けば，

$$\sum_{\mu}{}':F_{p-i,\,\mu}\bar{F}_{i,\,\mu}:=0 \tag{4.4}$$

である．さらに補題3.1の証明と同様な計算で，(4.4) は次のように書きかえられる；

定義 4.1.

$$\sum_{\mu}{}'\partial_\mu^{p-i}(u^k)\partial_\mu^i(\bar{u}^l)=0 \tag{4.5}$$

for $1\le k\le p-i,\ 1\le l\le i.$
この非線型偏微分方程式系を (p,i)-*submodel* と呼ぶことにする．

以上の議論より，(4.3) を用いて次の定理を得る．

定理 4.2. 任意の C^p 級関数 $f=f(u,\bar{u})$ に対し

$$V_{(p,i),\,\mu}(f) \tag{4.6}$$

は (p,i)-*submodel* の保存カレントである．

注意 4.3. 明らかに $(p,0)$-*submodel* は p-*submodel* に一致し，保存カレント $V_{(p,0),\,\mu}(f)$ は $V_{p,\,\mu}(f)$ に一致する．

例として，階数の低い場合に，求めた保存カレントを書いてみると次のようになる．

$$\begin{aligned} V_{(2,0),\mu}(f) &= F_{1,\mu}(f) - \bar{F}_{1,\mu}(f) \\ &= \partial_\mu u \frac{\partial f}{\partial u} - \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} V_{(3,0),\mu}(f) &= F_{2,\mu}(f) - :F_{1,\mu}\bar{F}_{1,\mu}:(f) + \bar{F}_{2,\mu}(f) \\ &= \partial_\mu^2 u \frac{\partial f}{\partial u} + (\partial_\mu u)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \partial_\mu u \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}} + \partial_\mu^2 \bar{u} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + (\partial_\mu \bar{u})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{u}^2}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} V_{(3,1),\mu}(f) &= :F_{1,\mu}\bar{F}_{1,\mu}:(f) \\ &= \partial_\mu u \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

5　(p,i)-submodel の解

(p,i)-submodel の解については，(2.5) を用いると次の定理が得られる．

定理 5.1. $f = f(u)$ を任意の正則関数とする．このとき，$u(x_0,\cdots,x_n)$ が *p-submodel* の解ならば，$f(u(x_0,\cdots,x_n))$ も解である．

$\sum_\mu{}' \alpha_\mu^{p-i}\bar{\alpha}_\mu^i = 0$ なる $u = \alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ は明らかに (p,i)-submodel の解である．したがって上の定理より次の系を得る．

系 5.2. $f = f(u)$ を任意の正則関数とする．このとき，

$$f(\alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \tag{5.1}$$

は (p,i)-*submodel* の解である．ただし $\sum_\mu{}' \alpha_\mu^{p-i}\bar{\alpha}_\mu^i = 0$.

参考文献

[1] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Submodels of Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and Conserved Currents, Exact Solutions,* Mod. Phys. Lett. A14(1999), 919-928.

[2] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents,* Phys. Lett. B438(1998)290-294.

[3] J. Riordan: *Derivatives of Composite Functions,* Bull. Am. Math. Soc. Vol52(1946), 664-667.

[4] R. Aldrovandi and L. P. Freitas: *Continuous iteration of dynamical maps,* J. Math. Phys. Vol39(1998), 5324-5336.